



INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Création : Mars 2021 |

Lois de Lenz-Faraday, champ électromoteur induit, équation de Maxwell-Faraday, courants de Foucault, freinage électromagnétique, chauffage par induction.

QUIZ - Phénomène d'induction

 Code TikZ des figures

 Template Latex

Ce chapitre est consacré à l'étude du mouvement des charges électriques dans un conducteur, éventuellement mobile, en présence d'un champ électromagnétique susceptible de varier dans le temps. L'ensemble des phénomènes électriques qui apparaissent est appelé **induction électromagnétique**.

Nous présenterons d'abord les lois qui découlent des travaux de Faraday et Lenz, puis nous verrons comment la théorie électromagnétique intègre ces phénomènes dans un cadre plus large que celui étudié jusqu'ici.

— APPROCHE HISTORIQUE —

FAITS EXPÉRIMENTAUX

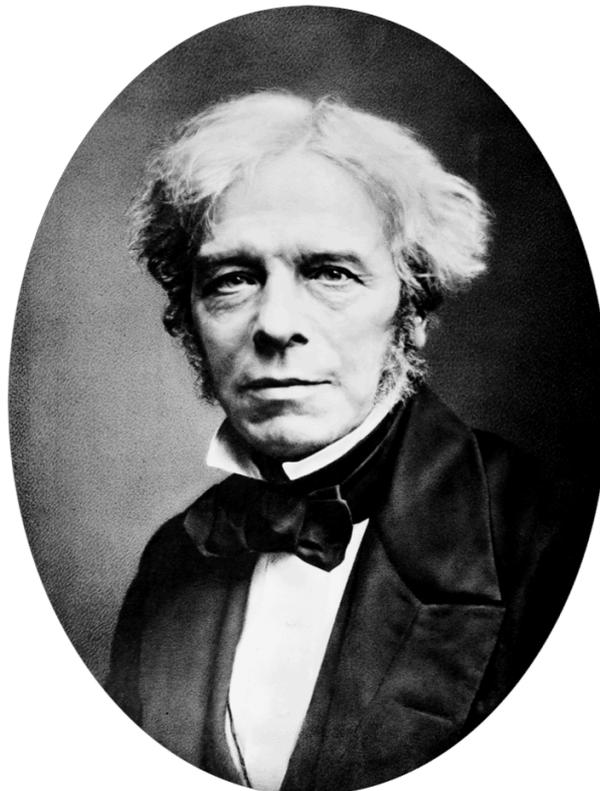


Fig. 1- Mickael Faraday (1791-1867)

Après la découverte d'Ørsted sur la possibilité de produire un champ magnétique à partir de l'électricité, on s'est bien entendu mis à la recherche de la possibilité inverse : produire de l'électricité à partir d'un champ magnétique. Michael Faraday, après de nombreuses tentatives infructueuses, parvint à ses fins en 1831, et découvrit qu'il est possible d'induire un courant électrique dans un conducteur en le soumettant à un flux magnétique *variable*.

Voyons comment se manifeste ce phénomène sur quelques expériences simples.

Expérience n°1 — Formons un circuit électrique avec une spire conductrice et un galvanomètre. Approchons le pôle d'un aimant droit. Le galvanomètre nous signale la présence d'un courant électrique, dit **courant induit** tant que l'aimant se déplace. Une fois l'aimant immobilisé, le galvanomètre n'indique aucun courant. Si l'on retire l'aimant dans un mouvement inverse, on observe à nouveau un courant électrique, mais cette fois-ci dans l'autre sens. Si l'on répète l'action plus rapidement, le courant électrique induit par le mouvement est plus intense.

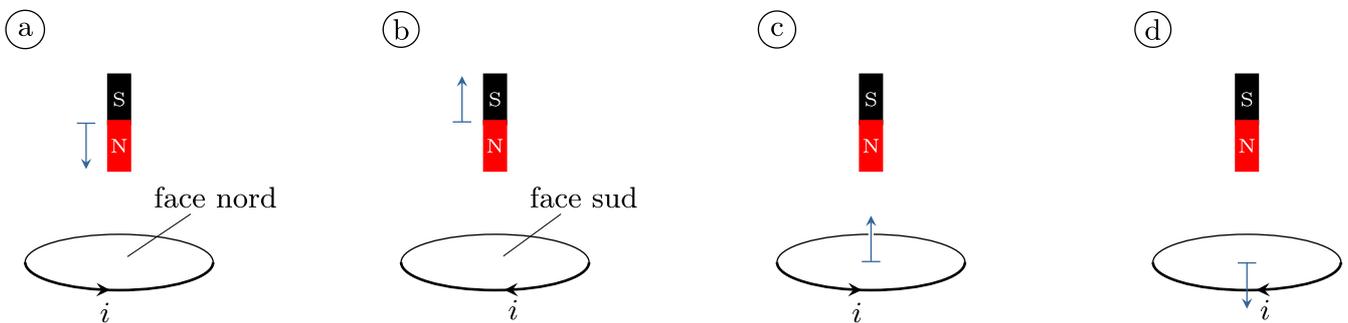


Fig. 2- Expériences 1 et 2 (le galvanomètre n'est pas représenté).

Expérience n°2 — Maintenons l'aimant fixe, puis déplaçons le circuit de sorte que le mouvement relatif soit le même que dans l'expérience précédente. Nous constatons le même phénomène de courants induits.

De ces deux expériences il en résulte que le mouvement relatif d'un inducteur par rapport à un circuit fermé provoque l'apparition d'un courant, dit courant d'induction.

Terminologie — on appelle *inducteur* la source de champ magnétique qui provoque le phénomène d'induction, et *l'induit* le circuit dans lequel apparaît le courant d'induction.

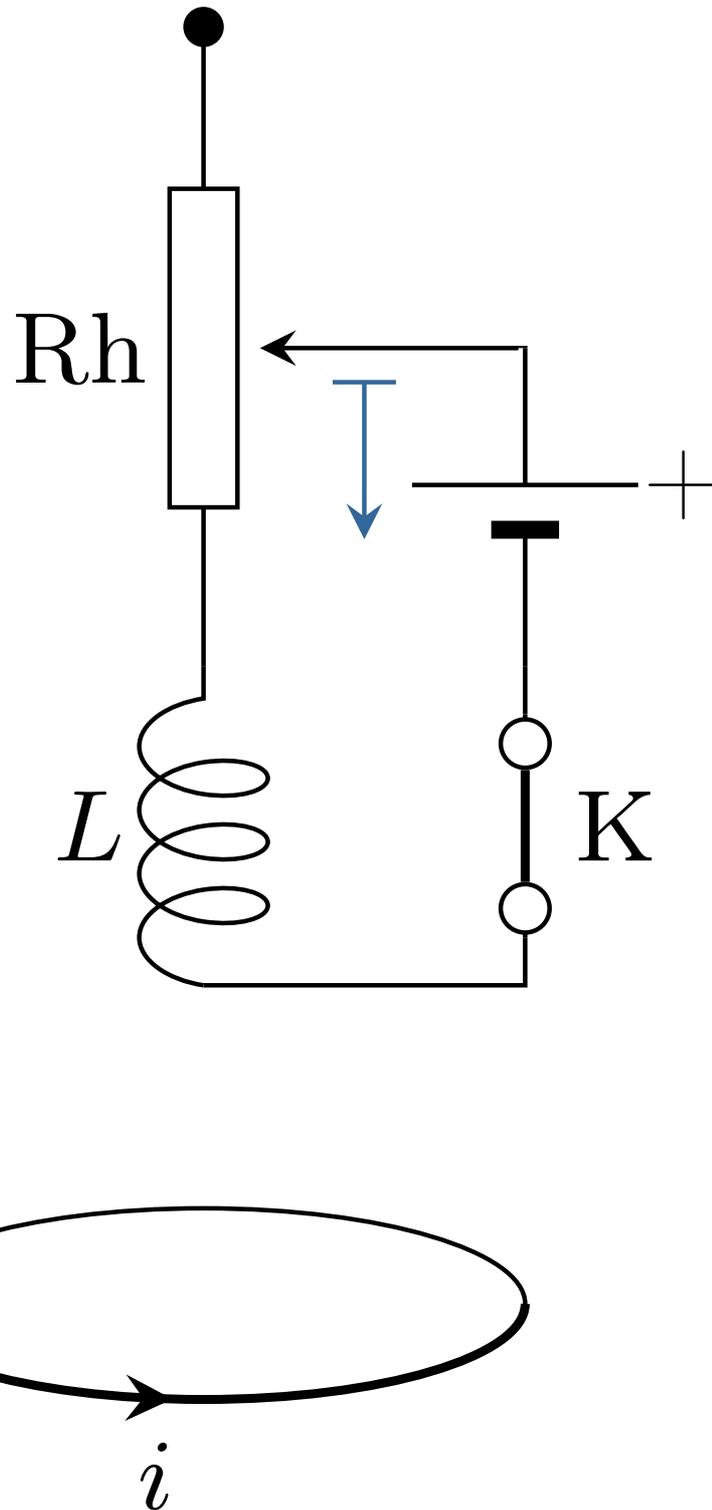


Fig. 3- Un courant induit apparaît dans la spire lorsque l'on ouvre ou ferme l'interrupteur K , ou lorsque l'on déplace le curseur du rhéostat Rh .

Expérience n°3 — On peut également induire un courant sans qu'il y ait de mouvement relatif entre l'inducteur et l'induit. Par exemple, on peut remplacer l'aimant par une bobine alimentée par une source de tension comme l'illustre la Fig.3 . En déplaçant la curseur du rhéostat ou en fermant l'interrupteur, le galvanomètre détecte un courant induit.

Dans ces trois expériences, c'est à chaque fois la *variation du flux magnétique* qui est associée à l'apparition d'un courant induit.

Expérience n°4 — Terminons, en reprenant l'expérience n°1 mais en ouvrant le circuit : aucun courant ne peut circuler dans ce cas. Que se passe-t-il alors lorsque l'aimant est mis en mouvement ? Un voltmètre branché aux bornes de l'induit affiche une tension à chaque mouvement de l'aimant, et dont la polarité change quand le sens du mouvement change. Autrement dit, le circuit se comporte comme une pile de f.é.m e .

♥ Conclusion

Toute variation de flux magnétique à travers un circuit provoque l'apparition d'une **force électromotrice induite** e . Le circuit est alors équivalent à une source de tension de f.é.m e :

- s'il est ouvert, la tension à ses bornes vaut e ;
- s'il est fermé, la f.é.m induite provoque la circulation d'un courant induit.

LOI DE LENZ-FARADAY

En 1834, Heindrich Lenz présente une formulation mathématique des résultats expérimentaux de Faraday.

♥ Loi de Lenz-Faraday

Toute variation de flux magnétique à travers un circuit C produit l'apparition d'une f.é.m d'induction e donnée par

$$e = - \frac{d\phi_B}{dt} \quad \text{avec} \quad \phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS$$

où e s'exprime en volts et ϕ_B en webers.



Fig. 4- Heindrich Lenz (1804-1865)

Le flux magnétique à travers un circuit peut varier pour différentes raisons.

- Le circuit peut se déformer ou se déplacer en présence d'un champ magnétique permanent ; on parle alors d'*induction de Lorentz*.
- L'inducteur peut produire un champ magnétique variable à travers un circuit fixe ; auquel cas on parlera d'*induction de Neumann*.

Le circuit siège d'un phénomène d'induction est équivalent à une source de tension *polarisée*, insérée dans le circuit. Pour déterminer son orientation, il faut au préalable choisir un sens d'orientation du circuit. **Ce sens positif détermine celui du vecteur normal \vec{n}** via la règle du tire-bouchon, ce qui permet de calculer le flux magnétique. Si $e > 0$, le générateur équivalent produit un courant dans le sens positif (cf. Fig. 5). Dans le cas contraire, le courant induit est orienté dans le sens négatif. La valeur de l'intensité est donnée par la loi d'Ohm $e = Ri$ où R est la résistance du circuit fermé.

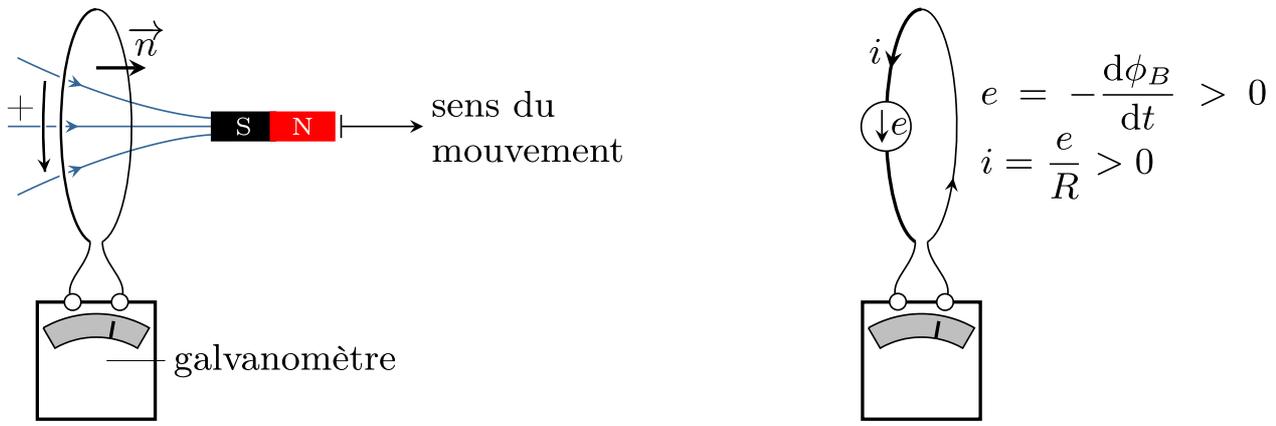


Fig. 5- Orientation de la f.é.m et du courant induit. Ici le flux diminue, ce qui induit un courant circulant dans le sens positif. Une orientation différente du circuit ne changerait pas le sens réel du courant.

Exemple

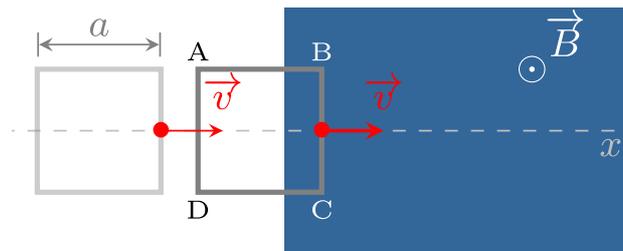


Fig. 6- Cadre en mouvement uniforme dans un champ permanent.

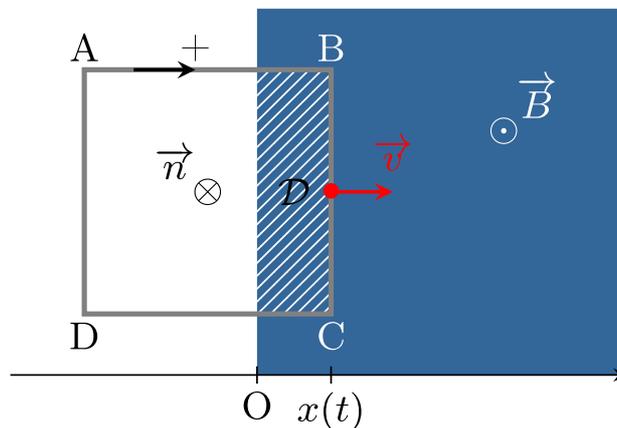


Fig. 7- Choix d'orientations.

Une spire en forme de carré d'arête a est entraînée à la vitesse constante \vec{v} en direction de l'axe Ox . Dans l'espace $x > 0$ règne un champ magnétique \vec{B} uniforme perpendiculaire au plan de la spire. Exprimons l'intensité du courant induit en fonction de v , B et R la résistance électrique de la spire.

Commençons par orienter le circuit. Choisissons le sens ABCD. À ce sens de parcours, est associé le vecteur normal \vec{n} opposé au champ magnétique (Fig.7). Appelons $x(t)$ l'abscisse du coté BC de la spire. Le flux magnétique à travers la spire s'écrit

$$\phi_B = \iint \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = - \iint_{\mathcal{D}} B \, dS = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ -Bax(t) & \text{si } x \in [0, a] \\ -Ba^2 & \text{si } x > a \end{cases}$$

D'après la loi de Faraday le circuit est équivalent à un générateur de f.é.m

$$e = - \frac{d\phi_B}{dt} = \begin{cases} Bav & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce générateur en court-circuit induit un courant d'intensité

$$(1) \quad i = \frac{e}{R} = \begin{cases} \frac{Bav}{R} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Un courant circule donc dans le sens positif durant l'entrée de la spire dans la zone magnétique.

💡 Remarque

La loi de Lenz-Faraday ne précise pas quelle surface S choisir dans le calcul du flux magnétique ; il suffit d'en choisir une qui s'appuie sur le circuit C . Par conséquent, la loi de Lenz-Faraday suppose implicitement la conservation du flux magnétique.

LOI DE MODÉRATION DE LENZ

La présence du signe $-$ dans la loi de Lenz-Faraday a une signification profonde : elle décrit le comportement modérateur du phénomène d'induction et traduit comme nous allons le voir la conservation de l'énergie.

Pour illustrer ceci, reprenons l'exemple précédent. Nous avons montré que durant son entrée dans la zone magnétique, la spire est le siège d'un courant induit $i = Bav/R$. On constate alors deux choses.

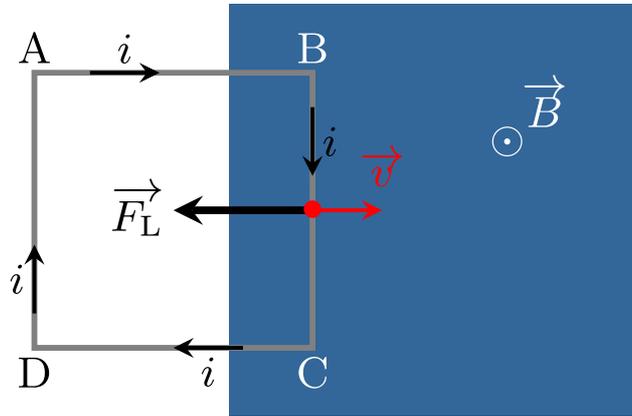


Fig. 8- Freinage électromagnétique.

- D'une part, ce courant électrique produit lui même un champ magnétique dont le flux tend à atténuer la variation du flux à l'origine de ce courant. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que cette propriété est indépendante de la façon d'orienter le circuit.
- D'autre part, il provoque l'apparition d'une force de Laplace

$$\vec{F}_L = i \vec{BC} \wedge \vec{B} = -\frac{B^2 a^2}{R} \vec{v}$$

qui s'oppose au mouvement en exerçant un effet de freinage visqueux.

Ainsi, les effets électromagnétiques issus de l'apparition du courant induit ont tendance à modérer le phénomène d'induction en freinant la spire et atténuant la variation du flux total. Ces effets modérateurs permettent de prévoir le sens du courant induit et plus généralement la polarité de la f.é.m d'induction.

♥ Loi de modération de Lenz

La polarité de la tension induite est telle que si le courant peut circuler, les effets qu'il génère s'opposent à la cause qui lui a donné naissance.

Cette loi reflète en réalité la conservation de l'énergie. Pour reprendre, l'exemple précédent, du fait de la force de freinage, l'opérateur doit produire un travail pour maintenir la vitesse de la spire constante. Le travail mécanique à fournir vaut

$$W = \int_{x=0}^{x=a} -\vec{F}_L \cdot d\vec{\ell} = \frac{B^2 a^3 v}{R}$$

Pendant le même temps, l'énergie électrique dissipée par effet joule vaut

$$W' = \int_{t=0}^{t=a/v} Ri^2 dt = R \times \left(\frac{Bav}{R} \right)^2 \times \frac{a}{v} = \frac{B^2 a^3 v}{R}$$

Comme on le constate, l'énergie électrique a été apportée par l'opérateur qui a dû pousser le cadre conducteur afin de maintenir sa vitesse constante. La loi de modération est le résultat de cette conversion d'énergie.

CONVERT MAGNETISM INTO ELECTRICITY

La découverte de l'induction a joué un rôle majeure dans le développement de l'électricité. On s'est vite rendu compte du potentiel de ce phénomène, notamment en matière de conversion d'énergie. De nos jours, l'un des convertisseurs le plus utilisé est l'*alternateur*. Il convertit l'énergie mécanique d'un *rotor* mis en mouvement (en général l'inducteur) en un courant alternatif au sein d'un *stator* (en général l'induit). On en trouve, dans les centrales électriques, les éoliennes, les voitures etc.

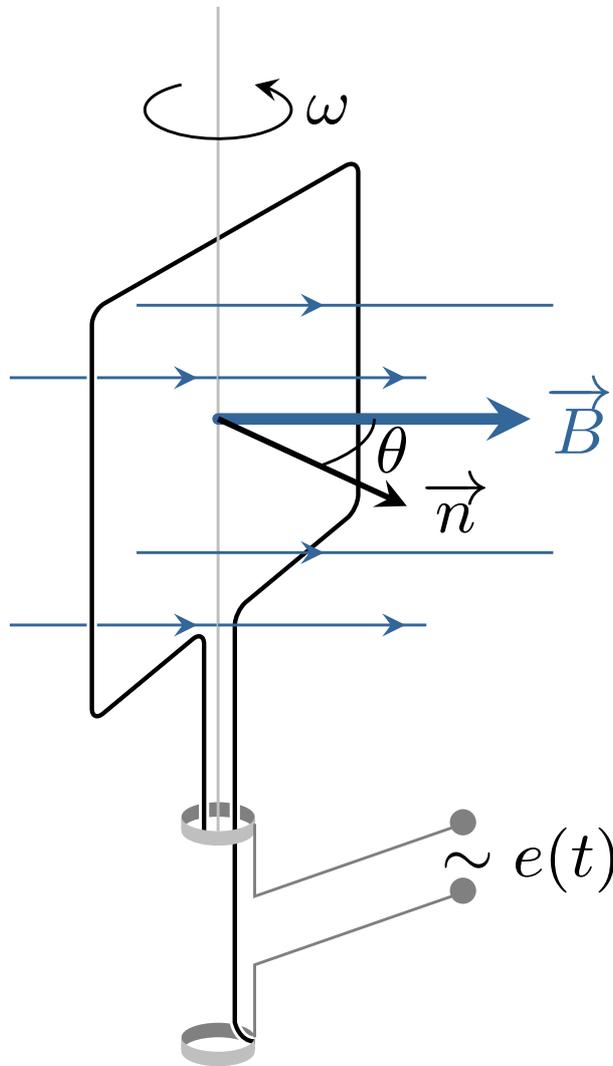


Fig. 9- Schéma de principe d'un alternateur à induit mobile.

Donnons le principe simplifié d'un alternateur à induit mobile (rotor) : un cadre constitué de N enroulements d'un conducteur est mis en rotation par rapport à un champ magnétique uniforme et permanent. On suppose que le cadre est entraîné à une vitesse angulaire constante ω . Le flux magnétique qui traverse le rotor vaut

$$\phi_B = \iint \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = NS \vec{B} \cdot \vec{n} = NSB \cos(\theta)$$

où S est l'aire du cadre. Le mouvement angulaire est décrit par $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ de sorte que la f.é.m

d'induction vaut

$$e(t) = -\frac{d\phi_B}{dt} = NSB\omega \sin(\omega t + \theta_0)$$

L'induit se comporte comme une source de tension alternative de fréquence $\nu = \omega/(2\pi)$ et d'amplitude $E = NSB\omega$. On note que plus le rotor tourne vite, plus l'amplitude de la tension est importante. Par exemple, dans un véhicule, l'alternateur étant entraîné par le moteur, on règle la valeur du champ magnétique de façon à éviter des surtensions qui pourraient endommager la batterie et les autres appareils consommateurs d'électricité.

Dans les centrales industrielles, la tension produite oscille à 50 Hz mais le rotor (l'inducteur) tourne moins vite, car il présente plusieurs paires de pôles magnétiques.

FLUX PROPRE ET FLUX EXTÉRIEUR

Dans les exemples précédents, le flux magnétique est déterminé en intégrant uniquement le champ magnétique extérieur \vec{B} . Or, si un courant induit circule, il doit aussi produire un champ magnétique et donc un flux magnétique supplémentaire. On appelle ce flux, le **flux propre**. Rigoureusement, on doit écrire

$$\phi_B = \iint_S \vec{B}_{\text{ext}} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_S \vec{B}_{\text{induit}} \cdot \vec{n} \, dS$$

Dans tout ce chapitre nous négligerons le flux propre devant le flux extérieur par soucis de simplicité. En conséquence, nos résultats ont un domaine de validité restreint.

Exemple

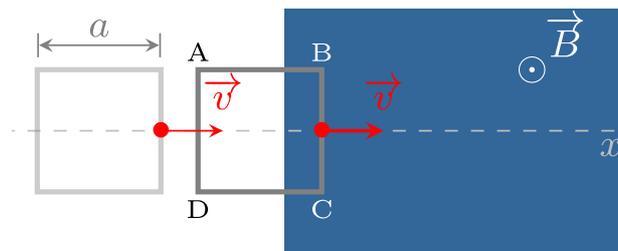


Fig. 10- Cadre en mouvement uniforme dans un champ permanent.

Reprenons l'exemple d'une spire entraînée à la vitesse constante \vec{v} entrant dans une zone où règne un champ magnétique \vec{B} uniforme perpendiculaire au plan de la spire. À quelle condition sur la vitesse, notre résultat (1) est-il correct ?

Pour cela estimons l'ordre de grandeur du flux propre :

$$\phi_{\text{propre}} \sim B_{\text{induit}} a^2 \sim \frac{\mu_0 i}{a} \times a^2$$

Tant que le flux propre est négligeable, on a $i = Bav/R$ ce qui donne $\phi_{\text{propre}} \sim \mu_0 Ba^2 v/R$. Le flux imposé étant de l'ordre de Ba^2 , le résultat (1) est une bonne approximation si

$$\frac{\mu_0 Ba^2 v}{R} \ll Ba^2 \quad \text{soit} \quad v \ll \frac{R}{\mu_0}$$

La solution (1) est donc exacte dans la limite $v \rightarrow 0$. Notez que la condition précédente n'est pas très contraignante : si l'on prend $R \sim 1 \Omega$ cela donne $v \ll 1 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$

Nous verrons dans un prochain chapitre que le flux total doit s'écrire

$$\phi_B = \phi_{\text{ext}} + Li$$

où L désigne l'*auto-inductance* du circuit. Dans ce contexte, l'équation électrique prend la forme

$$e(t) = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt} - L \frac{di}{dt}$$

Négliger le flux propre revient donc à négliger l'auto-inductance.

— ORIGINE DE L'INDUCTION DE LORENTZ —

CHAMP ÉLECTROMOTEUR DE LORENTZ

Expérience

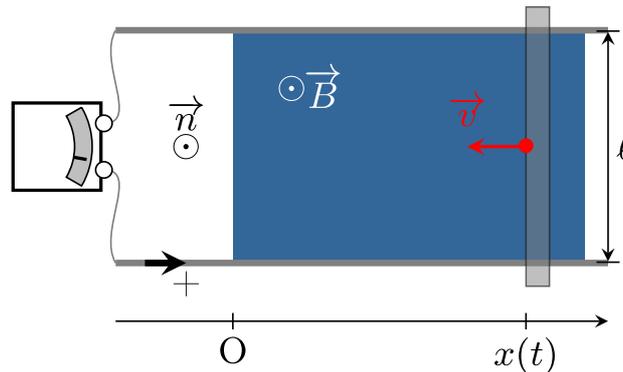


Fig. 11- Expérience vue de dessus.

Une barre conductrice mobile est disposée sur deux rails conducteurs parallèles espacés de l et reliés à un galvanomètre. Le rail et les fils de connexion présentent une résistance négligeable devant celle de la barre conductrice de sorte que la résistance du circuit ne varie pas lorsque la barre se déplace ; on la note R .

L'ensemble est plongé dans un champ magnétique permanent et uniforme. Entraînons la barre à la vitesse \vec{v} ; le galvanomètre indique alors l'apparition d'un courant induit dans le sens positif.

Que prévoit la loi de Lenz-Faraday ? — Compte tenu du choix d'orientation du circuit, le flux magnétique s'écrit

$$\phi_B(t) = \iint \vec{B} \cdot \vec{n} dS = B\ell x(t)$$

on en déduit

$$e = -\frac{d\phi_B}{dt} = Blv \quad \text{avec} \quad v = |\dot{x}| = -\dot{x}$$

Si l'on ferme le circuit, un courant induit d'intensité $i = e/R = Blv/R$ circule dans le sens positif comme observé expérimentalement. On peut vérifier qu'une force de freinage apparaît et que le courant induit tend à atténuer la variation du flux magnétique conformément à la loi de modération de Lenz.

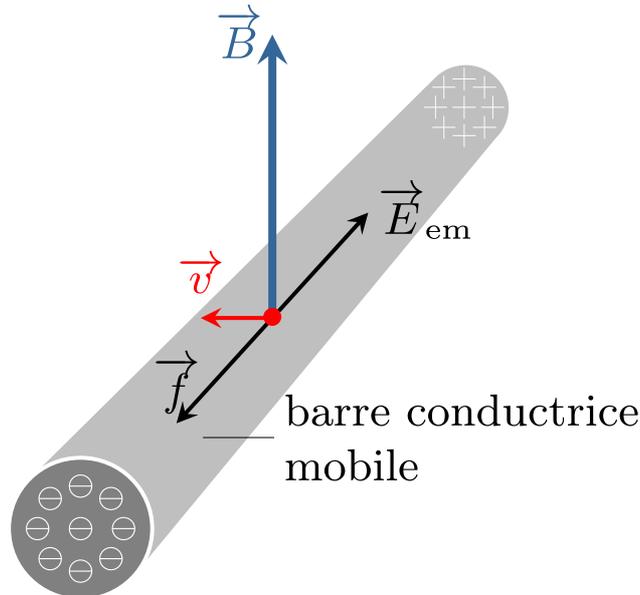


Fig. 12- Accumulation des porteurs de charges aux extrémités de la barre en circuit ouvert.

Interprétation dans le référentiel du laboratoire — Considérons les électrons libres de la barre en mouvement. Un observateur dans le référentiel du laboratoire voit ces électrons animés, en moyenne, d'une vitesse \vec{v} en présence d'un champ magnétique \vec{B} . Apparaît alors une force magnétique $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ qui présente une composante non nulle le long de la barre conductrice. Aussi,

- si le circuit est ouvert (la barre n'est pas posée sur les rails), il y a accumulation de charges \ominus à une extrémité de la barre, et de charges \oplus à l'autre extrémité, d'où l'apparition d'une tension aux extrémités de la barre.
- si le circuit est fermé, les charges peuvent circuler ; un courant induit circule dans le sens positif (les électrons se déplacent dans le sens négatif).

En résumé, le courant induit résulte du déplacement des porteurs de charges libres du conducteur sous l'action de la force de Lorentz. On retrouve qualitativement les conclusions déduites de la loi de Lenz.

Interprétation dans le référentiel lié au conducteur — Dans le cadre de la mécanique newtonienne, la force est un invariant galiléen. C'est pourquoi les porteurs de charge sont aussi soumis à la force $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ dans le référentiel lié à la barre. Cependant, les électrons étant immobiles, cette force ne peut être que de nature électrique. Autrement dit, dans le référentiel lié à la barre, les

électrons sont soumis à une force

$$\vec{f} = q\vec{E}_{em} \quad \text{avec} \quad \vec{E}_{em} = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Ce champ de nature électrique dans le référentiel lié à la barre est appelé **champ électromoteur**, car il met en mouvement les porteurs de charge. En circuit ouvert, ce champ électromoteur est responsable de l'accumulation des charges aux extrémités de la barre (Fig.12). Ces charges superficielles créent un champ électrostatique \vec{E} qui neutralise le champ électromoteur de façon à maintenir les électrons au repos:

$$\vec{E} + \vec{E}_{em} = \vec{0}$$

La barre est donc équivalente à un générateur de tension à vide

$$e = V_{\oplus} - V_{\ominus} = \int_{\oplus}^{\ominus} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\ominus}^{\oplus} \vec{E}_{em} \cdot d\vec{\ell} = vB\ell$$

On retrouve le même résultat que celui obtenu par la relation de Lenz-Faraday.

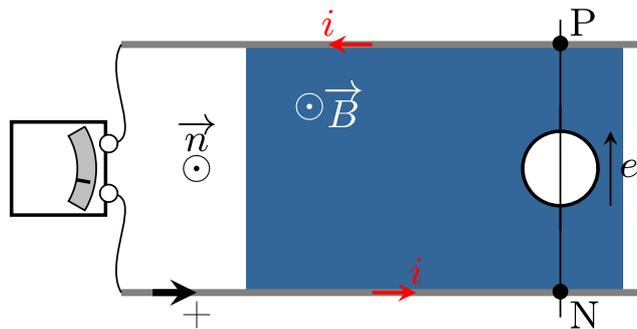


Fig. 13- Le courant circule dans le sens du champ électromoteur.

Lorsque le circuit est fermé, ce champ électromoteur donne l'énergie nécessaire aux porteurs de charges pour vaincre l'effet du champ électrostatique ainsi que les effets dissipatifs liés à l'effet Joule. La tension aux bornes de la barre vaut alors

$$U_{PN} = e - Ri$$

où R est la résistance de la portion PN de la barre conductrice.

♥ Résumé

Dans le référentiel lié à la barre mobile, les porteurs de charge sont soumis à un champ électrique dont une composante, appelée champ électromoteur de Lorentz et noté \vec{E}_{em} , est responsable de l'apparition de la f.é.m d'induction. On a

$$\vec{E}_{em} = \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \text{et} \quad e = \oint \vec{E}_{em} \cdot d\vec{\ell}$$

GÉNÉRALISATION

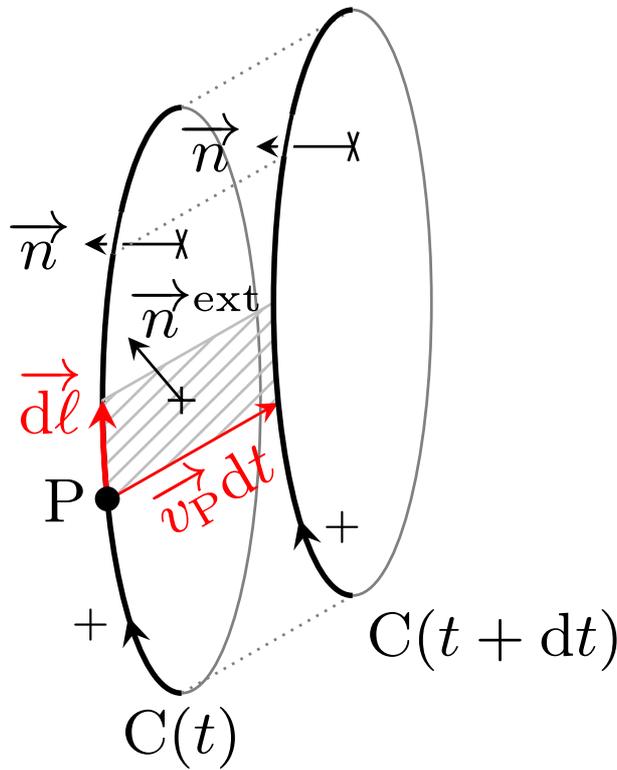


Fig. 14- Le circuit balaye une surface Σ entre t et $t + dt$.

Le résultat précédent se généralise pour tout circuit filiforme en mouvement dans un champ magnétique uniforme.

Considérons un circuit C filiforme fermé de forme quelconque soumis à un mouvement et/ou à une déformation au cours du temps. Notons \vec{v}_P la vitesse de déplacement d'un point P du circuit C . La démonstration repose sur la conservation du flux magnétique

$$(2) \quad \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} d\vec{S} = 0$$

Notons $\phi(t)$ le flux magnétique à travers C à l'instant t et $\phi(t + dt)$ celui à travers le circuit à l'instant $t + dt$. Lors de son déplacement, le circuit balaye une surface latérale Σ , de sorte que la réunion de Σ et de la surface des spires aux deux instants t et $t + dt$ forme une surface fermée. En vertu de (2) on a

$$\phi(t) - \phi(t + dt) + \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = 0 \quad \text{avec} \quad \phi(t) = \iint_{S(t)} \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

où le signe $-$ du deuxième terme provient de la convention d'orientation de \vec{n}^{ext} .

Rappelons que la normale \vec{n}^{ext} est toujours dirigée vers l'extérieur de la surface fermée.

Pendant dt , le flux magnétique à travers la spire varie donc de

$$d\phi = \phi(t + dt) - \phi(t) = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS$$

Exprimons l'élément de surface latérale en fonction de l'élément de parcours infinitésimal $d\vec{\ell}$ et \vec{v}_P :

$\vec{n}^{\text{ext}} dS = \vec{v}_P dt \wedge d\vec{\ell}$. Il en découle,

$$d\phi = \left[\oint_{C(t)} \vec{B} \cdot (\vec{v}_P \wedge d\vec{\ell}) \right] dt = - \left[\oint_{C(t)} d\vec{\ell} \cdot (\vec{v}_P \wedge \vec{B}) \right] dt$$

Rappel de math — le produit mixte $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$ est invariant par permutation circulaire

♥ À retenir

La f.é.m induite par le déplacement d'un circuit dans un champ magnétique permanent \vec{B} s'interprète comme la circulation du champ électromoteur de Lorentz $\vec{E}_{\text{em}} = \vec{v}_P \wedge \vec{B}$ le long du circuit.

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = \oint_{C(t)} (\vec{v}_P \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \oint_{C(t)} \vec{E}_{\text{em}} \cdot d\vec{\ell}$$

FREINAGE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Comme on l'a déjà vu, le mouvement d'un circuit dans un champ magnétique fait apparaître des courants induits qui, par leurs effets, s'opposent au mouvement en développant une force de freinage de type visqueux.

Ce phénomène est mis à profit dans les dispositifs de freinage des poids lourds et des autocars. En général, un disque métallique entraîné par les roues passe dans l'entrefer d'un électroaimant fixe. Des courants induits apparaissent alors au sein du conducteur et dissipent une partie de l'énergie mécanique par effet Joule. La force de freinage qui en résulte dépend alors de la distribution de ces courants volumiques, appelés *courants de Foucault*. Celle-ci est assez compliquée à déterminer en général, mais on peut dégager les idées essentielles avec une géométrie simple.

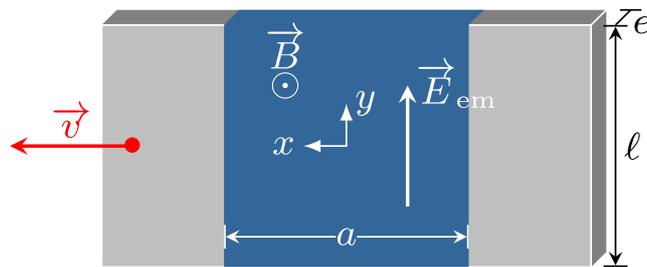


Fig. 15- *Plaque conductrice en mouvement dans un champ magnétique uniforme*

Imaginons une plaque conductrice en translation à la vitesse \vec{v} dans une zone de largeur a où règne un champ magnétique uniforme \vec{B} perpendiculaire à la plaque. Le mouvement de la plaque induit un champ électromoteur

$$\vec{E}_{\text{em}} = \vec{v} \wedge \vec{B} = vB \vec{u}_y$$

Ce champ va mettre en mouvement les porteurs de charges dans la zone magnétique. En vertu de la

loi d'Ohm, le vecteur densité de courant s'écrit

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}_{\text{em}} = \gamma v B \vec{u}_y$$

Rappelons que pour une distribution volumique de courant, la force de Laplace s'écrit

$$\vec{F}_L = \iiint \vec{j} \wedge \vec{B} \, d\tau$$

En intégrant dans le volume où règne le champ magnétique, on obtient

$$\vec{F}_L = -\alpha_0 \vec{v} \quad \text{avec} \quad \alpha_0 = a e l \gamma B^2$$

La force induite est une force de frottement de type visqueux, et le coefficient de frottement α varie comme le carré du champ magnétique. Dans les poids lourds, le champ magnétique est produit par un électroaimant ; dès lors on peut contrôler la puissance du freinage *via* l'alimentation de l'électroaimant. Un tel dispositif présente les avantages suivants :

- le disque métallique qui subit le freinage ne subit pas d'usure mécanique, contrairement aux dispositifs classiques de freinage qui reposent sur la friction ;
- si la roue se bloque, la force de freinage disparaît ; il n'y a donc aucun risque de dérapage.

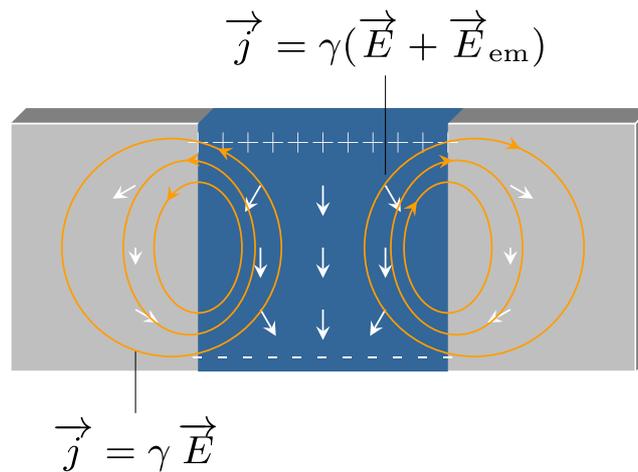


Fig. 16- Allure des courants de Foucault (lignes orange). Les flèches blanche indiquent l'allure du champ électrostatique

Le lecteur attentif aura sans doute remarqué une certaine incohérence dans le modèle précédent. En effet, le courant induit ne peut pas expulser les charges hors de la plaque conductrice. Par conséquent, on doit observer une accumulation de charges sur les bords de la plaque. Il en résulte l'apparition d'un champ électrostatique \vec{E} qui se superpose au champ électromoteur. On a donc plutôt

$$\vec{j} = \begin{cases} \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{em}}) & \text{si } |x| < a/2 \\ \gamma \vec{E} & \text{sinon} \end{cases}$$

Le champ électromoteur provoque la mise en circulation des courants de Foucault, et les charges statiques les guident *via* le champ électrostatique \vec{E} , de façon à refermer les lignes de courant sur

elles-mêmes (Fig.16). On montre que le champ électrostatique peut se mettre sous la forme

$$\vec{E} = vB \left[f(x, y) \vec{u}_x + g(x, y) \vec{u}_y \right]$$

La force de Laplace vaut alors

$$\vec{F} = \iiint \vec{j} \wedge \vec{B} \, d\tau = \gamma v B^2 \left(\vec{u}_y \iiint f(x, y) \, d\tau - \vec{u}_x \iiint (1 + g(x, y)) \, d\tau \right)$$

Dans la configuration symétrique de la figure 16 , on a

$$f(x, y) = -f(x, -y) \quad \text{et} \quad g(x, y) = g(x, -y) < 0$$

Dans ce cas le premier terme disparaît, et il reste

$$\vec{F}_L = -\alpha \vec{v} \quad \text{avec} \quad \alpha = \alpha_0 \langle 1 + g(x, y) \rangle < \alpha_0$$

où $\langle \dots \rangle$ désigne la moyenne calculée dans le volume où règne le champ magnétique. Finalement, le coefficient de frottement fluide est inférieur à celui obtenu en négligeant l'accumulation des charges qui assurent la fermeture des lignes de courant. De ce point de vue on peut dire que le champ électrostatique joue un rôle contre-électromoteur.

En pratique le champ magnétique est localisé et non uniforme. Dans ce cas, en plus des charges superficielles, des charges volumiques de guidage apparaissent là où le champ magnétique décroît rapidement. De manière générale, le coefficient de frottement dépend du profil du champ magnétique et de la géométrie du conducteur *via* les effets de bords [2]. On a toujours $\alpha \leq \alpha_0/2$ où α_0 est le coefficient de frottement obtenu en tenant compte uniquement du champ électromoteur.

— INDUCTION DE NEUMANN —

On peut aussi induire un courant en soumettant un circuit fixe à un champ magnétique variable dans le temps. Quelle est l'origine du champ électromoteur dans ce cas ?

ÉQUATION DE MAXWELL-FARADAY

Les expériences de Faraday ont montré que le courant induit était lié à la variation du flux magnétique à travers l'induit, peu importe l'origine des causes responsables de la variation du flux. Ici le flux magnétique varie car le champ magnétique dépend explicitement du temps. Notons $\vec{B}(\mathbf{M}, t)$ le champ magnétique qui règne en un point quelconque M de l'espace, et à l'instant t . Le courant électrique est lié à l'existence d'un champ électrique dont une composante présente un caractère électromoteur. La f.é.m induite doit s'écrire

$$(3) \quad e = \oint_C \vec{E}(\mathbf{P}, t) \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B}(\mathbf{M}, t) \cdot \vec{n} \, dS$$

Notez que P parcourt le circuit dans le sens positif alors que M parcourt une surface S qui s'appuie sur C.

Le théorème de Stokes indique que

$$\oint_C \vec{E}(\mathbf{P}, t) \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(\mathbf{M}, t) \cdot \vec{n} \, dS$$

Par conséquent,

$$e = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(\mathbf{M}, t) \cdot \vec{n} \, dS = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\mathbf{M}, t) \cdot \vec{n} \, dS$$

Équation qui, pour être valable quelle que soit la surface S choisie, implique la relation locale suivante :

♥ Relation de Maxwell-Faraday

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

La relation de Maxwell-Faraday est un énoncé complètement équivalent à la relation (3). Elle constitue l'une des 4 équations locales de Maxwell. Insistons sur le fait que cette dernière relation s'applique qu'il y ait ou non un circuit conducteur. **Toute variation temporelle d'un champ magnétique induit au même endroit un champ électrique qui a la particularité de ne pas être conservatif.**

💡 Remarque

En régime stationnaire, on retrouve la relation $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$.

POTENTIEL ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Comme on l'a déjà signalé, la notion de flux magnétique « à travers un circuit » n'a de sens que si le champ magnétique reste à flux conservatif. C'est pourquoi, on étend la conservation du flux magnétique, aux régimes variables.

$$\text{div} \vec{B}(\mathbf{M}, t) = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\mathbf{M}, t) = 0 \quad \heartsuit$$

Il en résulte que le champ magnétique dérive d'un **potentiel vecteur** $\vec{A}(\mathbf{M}, t)$ fonction de l'espace et du temps :

$$\vec{B}(\mathbf{M}, t) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(\mathbf{M}, t) \quad \heartsuit$$

Si l'on injecte cette dernière relation dans l'équation de Maxwell-Faraday, on obtient

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}}{\partial t} = - \overrightarrow{\text{rot}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

Autrement dit, le champ $\vec{E} + \partial \vec{A} / \partial t$ est un gradient. On pose alors

♥ Champ électrique en régime variable

$$\vec{E}(\mathbf{M}, t) = -\vec{\text{grad}}V(\mathbf{M}, t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

où $V(\mathbf{M}, t)$ désigne le potentiel électrique (on dit aussi *potentiel scalaire*).

En régime variable, le champ électrique présente une composante non conservative, appelé champ électromoteur de Neumann : $\vec{E}_{\text{em}} = -\partial \vec{A} / \partial t$.

De la même manière que l'ensemble $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ constitue le **champ électromagnétique**, l'ensemble $\{V, \vec{A}\}$ constitue le **potentiel électromagnétique**.

Exemple de calcul

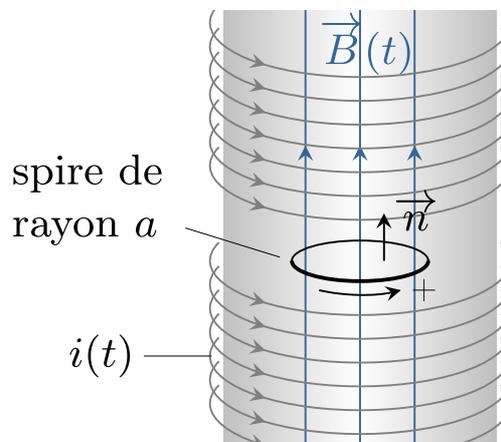


Fig. 17- Spire conductrice en présence d'un champ magnétique axial et variable.

Considérons une spire de rayon a d'axe (Oz) . Plaçons cette spire dans un champ magnétique uniforme et axial, mais variable dans le temps

$$\vec{B} = B(t) \vec{u}_z$$

On peut penser au champ magnétique produit par un solénoïde quasi-infini, de densité d'enroulement n , alimenté par un courant d'intensité variable $i(t)$; on a dans ce cas $B(t) = \mu_0 n i(t)$.

Tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan d'antisymétrie ; par conséquent le potentiel vecteur est orthoradial. Vu l'invariance par rotation et translation, on peut écrire $\vec{A} = A(r) \vec{u}_\theta$. Une des méthodes permettant de trouver l'expression de $A(r)$ consiste à calculer le flux magnétique à travers une ligne de champ du potentiel vecteur, à savoir un cercle de rayon r . D'une part, on a

$$\phi_B = \iint \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = B(t) \pi r^2$$

D'autre part,

$$\phi_B = \iint \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \oint \vec{A} \cdot \vec{d\ell} = 2\pi r A(r)$$

Il découle $\vec{A} = \frac{1}{2}rB(t)\vec{u}_\theta$. Vérifions que son rotationnel donne bien le champ magnétique :

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ r \frac{\partial \theta}{\partial A_r} - \frac{\partial z}{\partial A_z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial r}{\partial A_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix} = \vec{B}$$

Poursuivons en déterminant le champ électromoteur :

$$\vec{E}_{\text{em}} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{2}r \frac{dB(t)}{dt} \vec{u}_\theta$$

Ce champ induit dans la spire un courant d'intensité algébrique

$$i = \frac{1}{R} \oint_{r=a} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\pi a^2}{R} \frac{dB(t)}{dt}$$

où R est la résistance de la spire et où l'auto-induction a été négligée.

CHAUFFAGE PAR INDUCTION

Comme nous venons de le voir dans l'exemple précédent, un champ magnétique axial et variable dans le temps induit un courant lui même variable dans une spire perpendiculaire au champ magnétique. Si l'on remplace la spire par un barreau conducteur, des courants de Foucault vont se développer au sein du matériau, et dissiper l'énergie électrique par effet Joule. C'est le principe du *chauffage par induction* qui a une grande importance, tant industrielle (fusion, soudure sans défaut) que domestique (cuisson sur plaque à induction).

Cherchons à déterminer la distribution de ces courants ainsi que la puissance dissipée par effet Joule en supposant que :

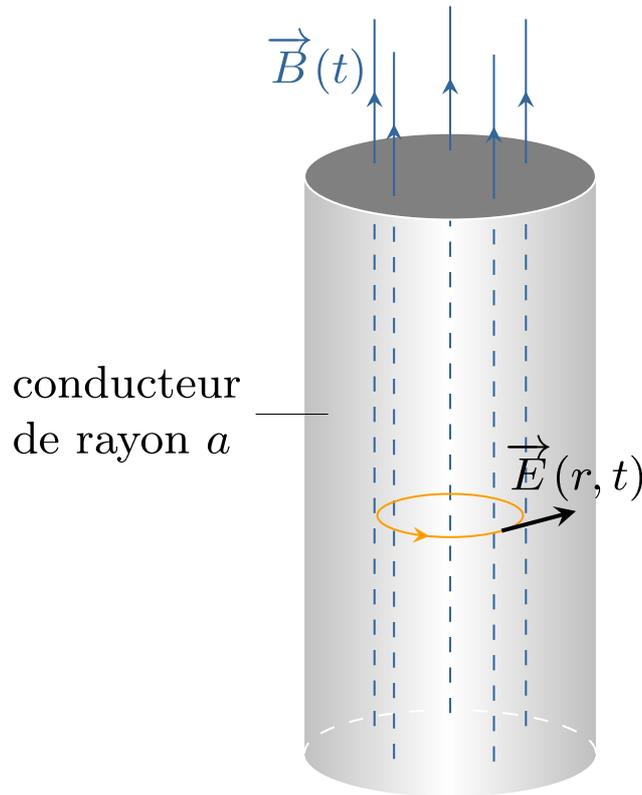


Fig. 18- Barreau cylindrique conducteur, siège de courants de Foucault induits par un champ magnétique variable.

- le champ magnétique est uniforme et alternatif. On note ω sa pulsation et B_0 son amplitude : $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$.
- Le barreau métallique est un cylindre d'axe (Oz) , de rayon a , de hauteur h et de conductivité électrique γ .
- L'auto-induction est négligée.

D'après l'exemple précédent, le champ électromoteur induit s'écrit

$$\vec{E}(r, t) = -\frac{1}{2}r \frac{dB(t)}{dt} \vec{u}_\theta = \frac{1}{2}B_0\omega \sin(\omega t) r \vec{u}_\theta$$

En vertu de la loi d'Ohm, les courants de Foucault se distribuent suivant une densité

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{1}{2}\gamma B_0\omega \sin(\omega t) r \vec{u}_\theta$$

On constate que les courants de Foucault ne sont pas répartis uniformément dans le cylindre. Par ailleurs, plus la fréquence est élevée, plus ces courants sont intenses.

Calculons maintenant la puissance dissipée par effet Joule. Notons ρ_e la densité des électrons libres. Chaque élément de volume $d\tau$ contient $\rho_e d\tau$ porteurs de charge et subit la force électrique $d\vec{F} = \rho_e d\tau \vec{E}$. Celle-ci développe une puissance

$$d\mathcal{P} = \rho_e d\tau \vec{E} \cdot \vec{v}_e = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

où l'on a fait intervenir \vec{v}_e la vitesse moyenne des électrons libres. Finalement, la puissance fournie au

cylindre conducteur s'écrit

$$\mathcal{P} = \iiint \vec{j} \cdot \vec{E} \, d\tau = \iiint \frac{\gamma B_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)}{4} r^2 \, d\tau$$

Après intégration sur le volume cylindrique, on trouve

$$\mathcal{P} = \frac{\gamma B_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)}{4} \underbrace{\iiint r^3 \, dr d\theta dz}_{\pi a^4 h/2} = \frac{\pi \gamma \omega^2 B_0^2 a^4 h}{8} \sin^2(\omega t)$$

En moyenne, la puissance dissipée par unité de volume ($\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$) vaut

$$\frac{\overline{\mathcal{P}}}{\mathcal{V}} = \frac{\gamma \omega^2 B_0^2 a^2}{16}$$

La densité de puissance moyenne croît linéairement avec la surface du cylindre, le carré du champ magnétique et la fréquence. Ce dernier point est cependant à nuancer car nous avons négligé l'auto-induction, ce qui restreint le domaine de validité de la relation obtenue. Nos résultats supposent en effet que le champ imposé est bien supérieur au champ magnétique induit. On peut estimer ce dernier à partir de l'expression de \vec{j} : on trouve $B_{\text{induit}} \sim \mu_0 \gamma a^2 \omega B_0 / 4$.

Démonstration



Nos résultats sont donc valides tant que

$$\frac{\mu_0 \gamma a^2 \omega B_0}{4} \ll B_0 \quad \text{soit} \quad \omega \ll \frac{4}{\mu_0 \gamma a^2}$$

Par exemple, pour un cylindre d'aluminium de rayon $a = 1 \text{ cm}$ et de conductivité $\gamma = 38 \cdot 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, cela donne une fréquence $\nu \ll 800 \text{ Hz}$. Au delà, la puissance dissipée croît plutôt en $\sqrt{\omega}$.

Pour un traitement complet du problème, voir [4].

— BILAN ET DISCUSSIONS —

ÉQUATIONS DE MAXWELL DANS L'ARQS

Résumons ce que l'on a appris dans ce chapitre : les phénomènes d'induction font apparaître un lien entre phénomène électrique et variation de flux, ce qui oblige à admettre l'existence d'un couplage entre champ électrique et magnétique. Les équations locales qui décrivent bien les phénomènes d'induction se résument à :

♥ Résumé

Relation avec les sources

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}\end{aligned}$$

Structure du champ

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

où la relation en gras traduit le couplage électromagnétique.

Ces équations forment les équations de Maxwell dans un cadre approché que l'on appelle *Approximation des Régimes Quasi Stationnaires* (ARQS en abrégé). Nous verrons [3] que cette approximation revient à négliger les retards de propagation de l'interaction électromagnétique. Pour un circuit de dimension caractéristique L , soumis à des grandeurs électromagnétiques variables de temps caractéristique T , le retard de propagation est effectivement négligeable si

$$cT \ll L \quad \text{soit en terme de fréquence} \quad \nu \ll \frac{c}{L}$$

Pour $L \sim 1 \text{ m}$, cela donne $\nu \ll 300 \text{ MHz}$. Cette gamme de fréquence définit le *domaine de l'électrocinétique*.

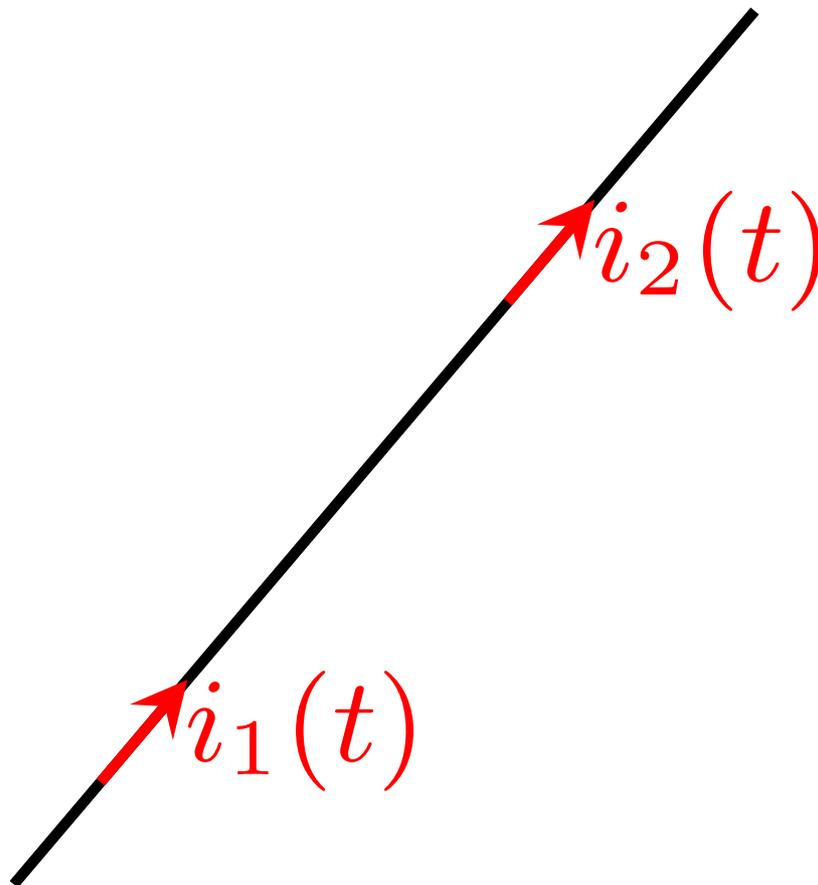


Fig. 19- Dans l'ARQS, $i_1(t) = i_2(t)$

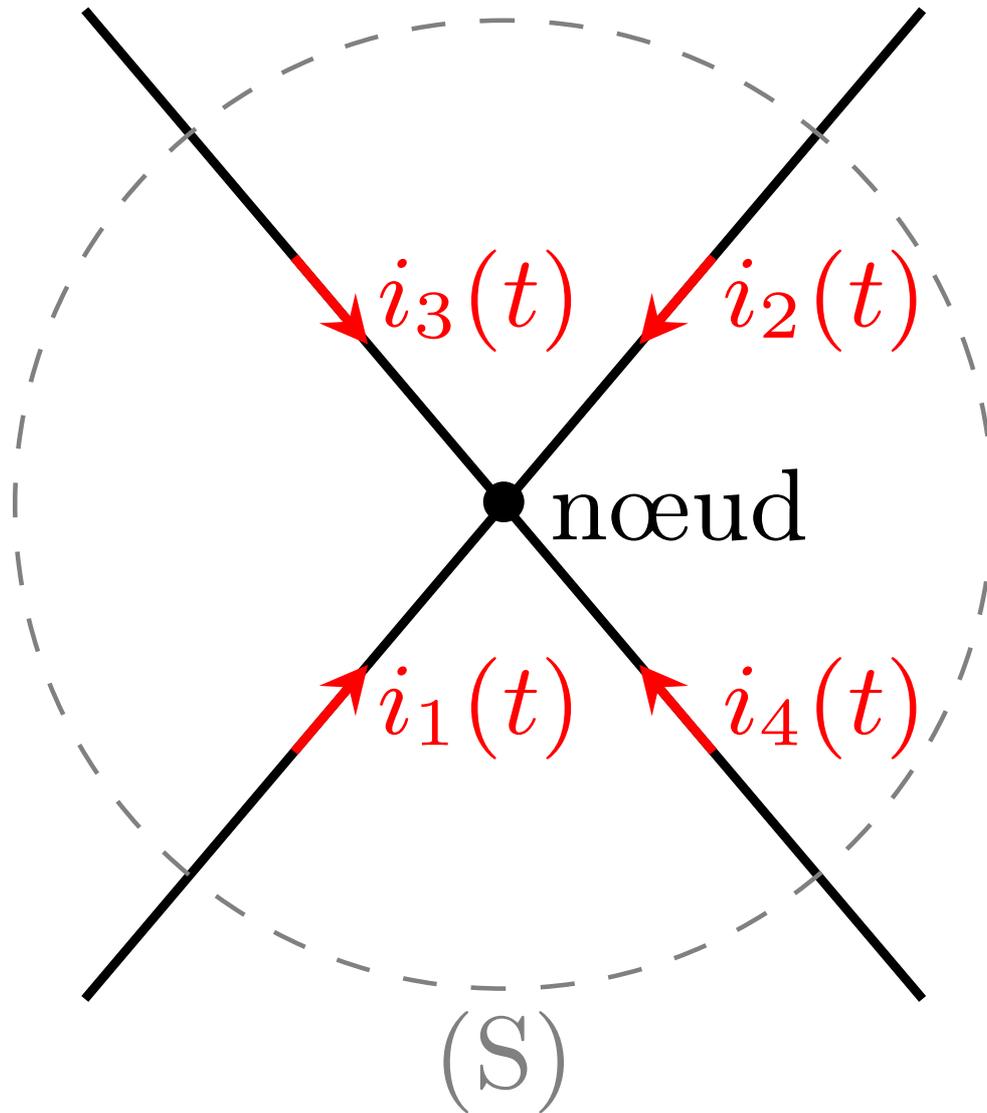


Fig. 20- Dans l'ARQS, $i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) = 0$.

Dans ce cadre, le courant électrique est à flux conservatif. En effet, puisque la divergence d'un rotationnel est nul, on a

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{B}) = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j}(M, t) = 0$$

Par conséquent, à un instant t , le long d'une branche d'un circuit, l'intensité électrique conserve la même valeur.

Par ailleurs, si on calcule le flux de \vec{j} à travers une surface fermée qui englobe un nœud, on trouve

$$\sum_{k=1}^{n \text{ branches}} i_k(t) = 0$$

où i_k est l'intensité algébrique du courant de la k -ième branche ; on retrouve la *loi des nœuds*.

Enfin, la loi d'Ohm des conducteurs est aussi valide en régime quasi-stationnaire :

$$\vec{j}(M, t) = \gamma \vec{E}'(M, t)$$

où \vec{E}' est le champ électrique *dans* le référentiel du conducteur.

DISCUSSION AUTOUR DE LA LOI DE FARADAY

Jusqu'ici, nous avons distingué le cas où le circuit est en mouvement dans un champ magnétique stationnaire du cas où le circuit est fixe dans un champ électromagnétique dépendant du temps. Mais que se passe-t-il lorsque un circuit est mobile dans un champ électromagnétique variable ? La loi de Faraday est-elle toujours valide ?

Dans le cas général, la f.é.m d'induction s'obtient toujours par le calcul de la circulation le long du circuit C du champ électrique :

$$e(t) = \oint_{P \in C} \vec{E}'(P, t) \cdot d\vec{\ell}$$

où \vec{E}' est le champ électrique *dans le référentiel lié à la portion P du circuit C*. Dans le cadre de l'électromagnétisme classique, \vec{E}' est lié au champ électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ du laboratoire *via*

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_P \wedge \vec{B} \quad \text{avec} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

ce qui donne la formule générale

♥ Formule générale de l'induction

$$(4) \quad e(t) = \underbrace{\oint -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(P, t) \cdot d\vec{\ell}}_{\text{Neumann}} + \underbrace{\oint \vec{v}_P \wedge \vec{B}(P, t) \cdot d\vec{\ell}}_{\text{Lorentz}}$$

Le premier terme traduit la variation du flux suite à la variation du champ magnétique quand le second terme correspond à la variation du flux suite au déplacement du circuit. Finalement, on peut écrire

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

à condition de tenir compte de toutes les causes de variation du flux.

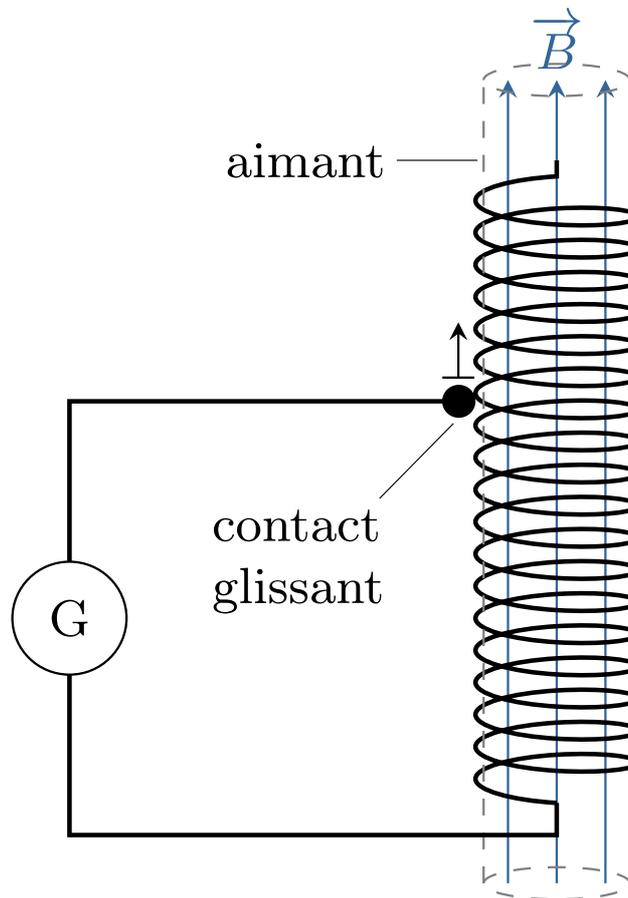


Fig. 21- Un exemple de circuit soumis à une variation de flux et pourtant siège d'aucun phénomène d'induction.

Toutefois, la « loi de Lenz-Faraday » souffre de quelques exceptions. Dans le circuit ci-contre, un contact glisse sur un bobinage que l'on a enroulé autour d'un aimant. Lorsque le curseur se déplace, le nombre de spires du circuit fermé varie de sorte que le flux magnétique à travers le circuit varie. Pourtant, aucun phénomène d'induction n'est observé. En effet, si l'on utilise la relation (4) on trouve $e = 0$, car :

1. d'une part, le potentiel vecteur est indépendant du temps ;
2. d'autre part, le champ électromoteur de Lorentz est quasi nul. En effet $\vec{B} \simeq \vec{0}$ à l'extérieur de l'aimant. Même si on tient compte du champ résiduel extérieur, ce dernier étant dans le plan du circuit, \vec{E}_{em} est nécessairement perpendiculaire à la partie mobile, de sorte que sa circulation ne peut que donner zéro.

La formule de Lenz-Faraday est donc à manier avec précaution. Cette formule suppose en fait une variation *continue* des paramètres qui définissent la configuration du circuit. L'exemple ci-dessus ne respecte pas cette condition, car la surface enfermée par le circuit varie de façon discontinue à chaque fois que le curseur entre en contact avec une spire au cours de son déplacement.

POUR EN SAVOIR PLUS...

[1] J. Roussel, " Interactions magnétiques ", [en ligne], 2016, disponible sur FEMTO-PHYSIQUE.FR

[2] A. Deiber et H. Idda, "Freinage par courants de Foucault (II): Des charges réparties en volume guident les courants induits", *BUP*, vol. 101, N°891, p.177-197, 2007.

[3] J. Roussel, " Équations de Maxwell ", [en ligne], 2022, disponible sur [FEMTO-PHYSIQUE.FR](https://femto-physique.fr)

[4] J. Roussel et D. Cordier, "Courants de Foucault induits dans un cylindre conducteur - Approche numérique", *BUP cahier enseignement supérieur*, vol. 105, N°938(2), p.101-114, 2011.

[5] H. Gié et J.P. Sarmant, *Electromagnétisme, volume 1 et 2*. Collection des sciences physiques, Technique et documentation, Lavoisier, 1985.

[6] E. M. Purcell, *Cours de physique de Berkeley, tome 2 : Électricité et magnétisme*. Dunod, 1998.

TOUS LES CHAPITRES

PRÉFACE >

 NOTATIONS

PARTIE 1 - ÉLECTROSTATIQUE ET MAGNÉTOSTATIQUE

INTERACTION ÉLECTROSTATIQUE >

POTENTIEL ET ÉNERGIE ÉLECTRIQUES >

LE DIPÔLE ÉLECTRIQUE >

CONDUCTEURS ÉLECTRIQUES >

INTERACTIONS MAGNÉTIQUES >

CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR DES COURANTS ÉLECTRIQUES >

COMPLÉMENTS

ACTION MAGNÉTIQUE SUR UNE SPIRE CIRCULAIRE >

PARTIE 2 - LES ÉQUATIONS DE MAXWELL

PROPRIÉTÉS LOCALES DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE >

PROPRIÉTÉS LOCALES DU CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE

INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

LES ÉQUATIONS DE MAXWELL

LES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

COMPLÉMENTS

CALCUL NUMÉRIQUE DE L'INDUCTANCE D'UNE BOBINE

PARTIE 3 - PHÉNOMÈNES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LA MATIÈRE

POLARISATION DE LA MATIÈRE

AIMANTATION DE LA MATIÈRE

À VOIR

 LE COURS D'ÉLECTRODYNAMIQUE

 LE COURS DE MÉCANIQUE NEWTONNIENNE

 LE COURS DE MÉCANIQUE DES FLUIDES

 LE COURS D'OPTIQUE

 **NEW** LE COURS DE THERMODYNAMIQUE

 LE COURS DE PHYSIQUE STATISTIQUE

 OUTILS ET MÉTHODES POUR LA PHYSIQUE

 INTRODUCTION À L'ANALYSE NUMÉRIQUE

 LA PAGE DES SIMULATIONS

 LE COIN DES QUIZ

 LE COIN DES EXERCICES

ONDES DANS LA MATIÈRE

FEMTO — **Électromagnétisme** — Cours sous licence Creative Commons 